УДК 534.222

В.А.Гусев, Р.А.Жостков, Д.А.Преснов

ЭВОЛЮЦИЯ ИНТЕНСИВНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ В РАМКАХ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Физический факультет, кафедра акустики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы
Тел.: (495) 939-2943; E-mail: vgusev@bk.ru

В данной работе изложена общая картина эволюции интенсивных акустических сигналов в рамках обобщенного уравнения Бюргерса с переменной эффективной вязкостью, представлены основные результаты и подходы к построению аналитических решений, определены характерные ситуации качественно различного поведения и области их применимости. Определены понятия нелинейной и линейной стадий эволюции профиля и предложен критерий выхода волны на линейную стадию на предельно больших расстояниях.

Целью данной работы является формирование полной качественной картины трансформации профилей интенсивных акустических волн, описываемых обобщенным уравнением Бюргерса (ОУБ), в зависимости от начальных условий и параметров среды. Эта задача подразумевает, в частности, построение аналитических решений для разных качественно отличающихся ситуаций и более четкое определение границ и условий применимости как новых, так и хорошо известных решений. Как частный случай рассмотрено обычное уравнение Бюргерса (УБ), для которого существует ряд классических решений и подходов, помогающих определить динамику искажения волны, и показаны возможности и ограничения данных решений, в том числе отмечен ряд малоизвестных фактов и внесено несколько уточнений. Поэтому изложение носит преимущественно обзорный характер и содержит как оригинальные результаты, так и основные результаты по данной теме, полученные другими авторами.

Значимость обобщенного уравнения Бюргерса с переменной эффективной вязкостью $\Gamma S(z)$ [1]:

$$\frac{\partial V}{\partial z}-V\frac{\partial V}{\partial \theta}=\Gamma S(z)\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}, \quad S(z=0)=1, \tag{1}$$

где V, z и θ – нормированные колебательная скорость, продольная координата и время соответственно, связана с его применимостью к широкому кругу задач. Если обычное уравнение Бюргерса (соответствующее $S\equiv 1$ в (1)) описывает плоские волны в однородной среде, то ОУБ (1) применимо для описания пространственно-модулированных волн и волновых пучков, волн в неоднородных и стратифицированных средах, сферических и цилиндрических волн, волновых процессов в трубах и рупорах.

Вначале необходимо напомнить основные факты из теории обычного УБ и уточнить их. 1) В случае большой вязкости $\Gamma >> 1$ (а практически, уже при $\Gamma \sim 1$) решение УБ близко к линейному и может быть найдено методом возмущений. Эффективный метод, позволяющий рассчитать амплитуды высших гармоник в этой ситуации, предложен в [1]. Очевидно, что данный вывод останется справедливым и для ОУБ (1), поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай малой вязкости $\Gamma << 1$. 2) Формально, точное решение УБ для произвольного начального профиля может быть найдено с помощью подстановки Хопфа-Коула, однако это решение представляется в интегральном виде и представляет значительные трудности для анализа. Для исходного синусоидального сигнала интегралы вычисляются, и решение задается в виде ряда [2], однако практический смысл этот ряд имеет для большой вязкости, когда можно ограничиться несколькими первыми членами ряда. При малой вязкости вычисление ряда является сложной «технической» проблемой. Исключение составляет анализ предельного поведения при исчезающей вязкости $\Gamma \to 0$, когда удается построить разрывные решения [2], не прибегая к дополнительному свойству – правилу равенства площадей. 3) Для исходного синусоидального профиля в области после образования разрыва ($z \ge 2$) существует два аналитических решения – решение Фея [2,3] в виде ряда и решение Хохлова для профиля с развитыми ударными фронтами [2]. Значимость решения Фея связана с его применимостью во всем диапазоне расстояний $2 \le z < \infty$, однако оно неудобно для анализа профиля в области развитых ударных фронтов. В тоже время, решение Хохлова хотя и удовлетворяет точно УБ, как обычно подчеркивается в учебных курсах, но является только его приближенным решением для исходного синусоидального сигнала при $\Gamma << 1$. Это видно из следующих соображений: а) при $z=0$ решение Хохлова удовлетворяет другому граничному условие (теорема единственности, естественно, выполняется), б) решение Хохлова описывает непериодический сигнал, периодическим профиль становится после процедуры периодического продолжения, в) при $\Gamma > 1$ профиль по форме совсем не похож на синусоидальный сигнал, в т.ч. меняется полярность импульса, г) по мере увеличения как Γ, так и z сдвигаются нулевые точки и меняется длительность решения Хохлова, что не соответствует условиям периодичности. На самом деле решение Хохлова является первым членом асимптотического ряда при $\Gamma << 1$ в области развитых фронтов и ограничено расстояниями, на которых ширина ударного фронта становится сравнимой с четвертью периода волны, а именно $z \sim 2/\Gamma$. После этого справедливым остается только решение Фея, причем главный член этого решения на расстояниях $z \geq 2/\Gamma$ является решением линеаризованного УБ. Этот результат находится в согласии со здравым смыслом – на больших расстояниях волна сильно затухает и роль нелинейности уменьшается.

Таким образом, для исходного синусоидального сигнала в среде с малой вязкостью процесс эволюции можно представить так: 1) на начальной стадии происходит укручение профиля в соответствии с уравнением простой волны, 2) затем, на стадии развитых ударных фронтов, профиль описывается решением Хохлова, которое строится как асимптотическое решение, 3) на предельно больших расстояниях волна выходит на линейную стадию и решение может быть найдено методом возмущение. Представляется, что подобная методика может быть обобщена на случай ОУБ (1).

Однако, такой ход трансформации профиля реализуется только для двуполярного импульса с нулевым средним за период. Подробное исследование, проведенное в работах С.Н.Гурбатова (см. например, [4]), показывает, что в рамках УБ однополярный импульс не выходит на линейную стадию на предельно больших расстояниях. Типичным примером является автомодельное решение УБ [2,4], в котором ударный фронт может быть выявлен на любых расстояниях, меняется только его масштаб. Ключевым является тот факт, что независимо от масштаба фронт влияет на динамику профиля волны на любых расстояниях, что вроде бы противоречит здравому смыслу. Разрешение парадокса в том, что в реальности всегда проявляется дифракционная расходимость и одномерное приближение на больших расстояниях становится неприменимым. Удобным инструментом анализа поведения волны на предельных расстояниях оказывается введенное текущее число Рейнольдса [4]; его недостаток связан с тем, что это число определяется по каркасу решения в рамках уравнения простых волн и не учитывает влияние диссипации на пиковые значения, что может заметно сказаться на больших расстояниях.

Перейдем к анализу ОУБ (1). В последнее время появилось довольно большое число публикаций, посвященных попыткам построения аналитических решений ОУБ, преимущественно для некоторых конкретных видов функции $S(z)$ (см., например [5,6]). При этом основное внимание уделялось построению обобщений для ОУБ решения Фея по аналогии с развитой в [3] процедурой. Однако, представленные в публикациях решения при сравнении с численным решением оказались применимыми только на больших расстояниях, а фактически в области выхода на линейную стадию, где главным членом является решение линеаризованного уравнения, а последующие поправки могут быть найдены с помощью различных вариантов метода возмущений. Подход, основанный на модификации для ОУБ подстановки Хопфа-Коула [7], также оказался применимым (и, возможно, полезным) в случае большой вязкости. Для области развитых ударных фронтов адекватных аналитических решений не предложено.

Учитывая все выше сказанное об УБ, решение ОУБ в случае малой вязкости в области развитых ударных фронтов необходимо искать в виде асимптотического ряда по аналогии с решением Хохлова. Первым важным результатом на этом пути является точное автомодельное решение [8] уравнения (1) для случая $S(z) = 1 + z/z_0$, характерного для стратифицированной атмосферы. Это решение описывает симметричный скачок конечной ширины, вблизи ударного фронта его удается записать в явном виде:

$$\Phi(\theta, z) = A\,\mathrm{th}\left[\frac{A}{4\Gamma}\left(1+\sqrt{1+\frac{8\Gamma}{A^2 z_0}}\right)\frac{\theta}{1+z/z_0}\right], \tag{2}$$

где A – амплитуда скачка. Ширина фронта в выражении (2) содержит как эффективную вязкость $S(z) = \Gamma(1 + z/z_0)$, так и дополнительную зависимость от амплитуды разрыва. При уменьшении амплитуды волны вклад дополнительного члена увеличивается. Используя выражение (2) для описания структуры ударного фронта в стратифицированной атмосфере, удалось построить обобщение решения Хохлова для исходного синусоидального сигнала и профиль исходной N-волны [8,9]; было показано, что полученные аналитические решения согласуются с численным решением.

Указанная поправка существенна для количественного совпадения численного и аналитического решений. Поэтому уравнение первого приближения в асимптотическом решении необходимо

Содержание

усовершенствовать по сравнению со стандартной процедурой, приведенной например в [10,11], а именно, учесть дополнительное слагаемое в исходном уравнении [12]:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial\theta_*^2}+V\frac{\partial V_0}{\partial\theta_*}+\Gamma\theta_*\frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial V_0}{\partial\theta_*}=0\,,\quad \theta_*=\theta/\Gamma\,. \tag{3}$$

Первые два слагаемых отвечают стандартному разложению и описывают скачок в виде гиперболического тангенса. Если величина $\Gamma\, dS/dz$ мала, то третье слагаемое несущественно, однако с уменьшением амплитуды роль поправочного слагаемого возрастает. Замечательно, что по структуре уравнение (3) совпадает с уравнением для автомодельного решения (2) [8,9], что позволяет написать улучшенное выражение для ударного фронта в среде с произвольной зависимостью эффективной вязкости [12]:

$$V_0(x)=A\,\mathrm{th}\left[\frac{A\theta}{4\Gamma S(z)}\left(1+\sqrt{1+\frac{8\Gamma}{A^2}\frac{dS}{dz}}\right)\right]. \tag{4}$$

Используя (4), можно построить выражение для одного периода исходно синусоидального сигнала, аналогичное по смыслу решению Хохлова, в среде с произвольной вязкостью. Для оценки границы области применимости этого решения используем условие – ширина ударного фронта становится равной четверти периода волны. Для стратифицированной атмосферы $S=1+z$, $A=(1+z)^{-1}$ получаем $z_{lin}\sim 1.5/\sqrt{\Gamma}$ [9]. На больших расстояниях нужно рассматривать линеаризованное уравнение (1).

В отличие от синусоидальной волны ударный фронт в однополярном импульсе сдвигается пропорционально амплитуде скачка, поэтому для построения такого профиля необходимо определить скорость смещения фронта. Именно этот эффект обуславливает отличие эволюции однополярных и двуполярных импульсов (это отличие далее будет уточнено). Скорость смещения ударного фронта можно найти, рассматривая в (1) время θ как функцию V и z. В итоге получим уравнение:

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}+V=\Gamma S(z)\left(\frac{\partial\theta}{\partial V}\right)^{-2}\frac{\partial^2\theta}{\partial V^2}\equiv-\Gamma S(z)\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{\partial\theta/\partial V}\right). \tag{5}$$

Рассмотрим участок профиля между двумя экстремумами профиля, причем слева пусть будет минимум $V_{\min}$, справа – максимум $V_{\max}$. Ясно, что ударный фронт будет формироваться на этом участке. Профиль всегда можно считать гладким, поскольку при учете вязкости все ударные фронты приобретают конечную ширину, а мгновенный скачок превращается в быстро убывающую экспоненту. Теперь проинтегрируем (5) по V от $V_{\min}$ до $V_{\max}$. В силу условия экстремума и гладкости функций величина $\partial\theta/\partial V$ в конечных точках обращается в бесконечность. Тогда для средней скорости смещения ударного фронта получим [12]

$$\partial\langle\theta\rangle/\partial z=-(V_{\min}+V_{\max})/2\,. \tag{6}$$

Таким образом, скорость смещения ударного фронта в обобщенном уравнении Бюргерса не зависит от вязкости, определяется полусуммой соседних пиковых значений и по смыслу совпадает с аналогичным выражением для простых волн с разрывом. Выражение (9) указывает, какие именно амплитуды определяют скорость ударного фронта конечной ширины. Для разрывной волны это были амплитуды на разрыве, для ударного фронта конечной ширины – ближайшие экстремальные значения. В частности, для симметричного сигнала, примером которого является синусоидальная волна, средняя скорость смещения фронта равна нулю. Для однополярного импульса $V_{\min}=0$. Таким образом, нужно различать две ситуации – профиль в области фронта симметричен и фронт не смещается (эта ситуация реализуется, например, для синуса), либо профиль не является симметричным, и фронт смещается (однополярные импульсы).

Для построения решения для исходной N-волны можно использовать галилеевское преобразование. К сожалению, это преобразование строго применимо только для стационарной волны, поэтому получаемое решение оказывается менее точным, чем модифицированное решение Хохлова для исходного синусоидального сигнала. Отметим, что вопрос о построении количественно точного решения для N-волны актуален не только для ОУБ, но и для УБ, поскольку рассмотренное в [4] решение также содержит артефакты, заметно проявляющиеся на больших расстояниях.

Определив выше ширину ударного фронта и смещение ударного фронта как целого, можно перейти к анализу поведения волны на предельно больших расстояниях. В отсутствие диссипации основным нелинейным эффектом на больших расстояниях является сдвиг фронта несимметричного профиля, при этом симметричный фронт не смещается, меняется лишь его амплитуда. Поэтому говоря о наличии или отсутствии нелинейных эффектов, нужно рассматривать оба фактора – наличие ярко выраженного ударного фронта и нелинейное смещение профиля в целом. В частности, нелинейное смещение формально присутствует даже для волны малой амплитуды и им можно пренебречь только при наличии другого механизма – диссипативного расплывания. Именно их конкуренция и определяет критерий выхода на линейную стадию: если диссипативное расплывание приводит к значительному уширению ударного фронта и, кроме того, превосходит нелинейное смещение, то волна выходит на линейную стадию. Если же диссипативное расплывание не может превзойти нелинейное смещение и его можно выделить на любом расстоянии, то волна на линейную стадию не выходит. Границу нелинейной и линейной стадий для несимметричного импульса можно определить как расстояние, на котором диффузионное расплывание фронта и нелинейный сдвиг ударного фронта как целого станут равными. Можно ожидать, что волны с близкими к симметричным профилями будут проявлять тенденцию выхода на линейную стадии, а с сильно несимметричными – к проявлению нелинейных свойств на больших расстояниях.

Для иллюстрации рассмотрим пример стратифицированной атмосферы $S = 1 + z$. Для качественной оценки примем, что амплитуда изменяется как $A \sim (1+z)^{-1/2}$, ширина фронта из (2) $\Delta\theta \sim \Gamma(1+z)^{3/2}$ и среднее смещение $\langle\theta\rangle \sim \sqrt{1+z}$. Отношение $\Delta\theta / \langle\theta\rangle \sim \Gamma(1+z)$ сравнивается с 1 при $\Gamma z \sim 1$, т.е. на этом расстоянии исходная волна выходит на линейную стадию (синусоидальный сигнал в этом случае выходит на линейную стадию при $z\sqrt{\Gamma} \sim 1$). Таким образом, переменный коэффициент вязкости изменил качественную картину распространения волны. Для N-волны в обычном уравнении Бюргерса ($A \sim (1+z)^{-1/2}$, $\Delta\theta \sim \Gamma\sqrt{1+z}$ и среднее смещение $\langle\theta\rangle \sim \sqrt{1+z}$) получаем, что это отношение всегда мало $\Delta\theta / \langle\theta\rangle \sim \Gamma$, т.е. N-волна на линейную стадию не выходит. В этой оценке использовались данные из каркаса в виде решения уравнения простой волны, что, в конечном счете, соответствует анализу на основе текущего числа Рейнольдса [4] $\mathrm{Re} = A\langle\theta\rangle / \Gamma S(z)$. Большие числа Рейнольдса соответствуют сильным нелинейным эффектам. Если $S(z)$ не растет или величина $A\langle\theta\rangle$ не убывает значительно, то решение не выходит на линейную стадию. Использование более тонких оценок на основе (2) позволяет точнее описать эволюцию волны и оценить область применимости используемых решений.

Таким образом, в эволюции волны в рамках обобщенного уравнения Бюргерса выделяются три характерные области: 1) искажение профиля по законам простой волны и образование разрыва, 2) нелинейная стадия – профиль с выраженными ударными фронтами, 3) линейная стадия. Для каждой стадии предложены аналитические решения для профиля волны. На нелинейной стадии это решение типа Хохлова с уточненным выражением для ширины профиля, справедливое для произвольной зависимости эффективной вязкости. На основании найденных выражений для ширины фронта и смещения фронта «в среднем» за счет нелинейности предложен критерий выхода волны на линейную стадию – превышение диффузионного расплывания над нелинейным смещением. Показано, что определяющим фактором является не одно- или двуполярность импульса в целом, а близость пиковых значений (по модулю) в соседних минимуме и максимуме профиля (т.е. в окрестности ударного фронта). Чем больше их отличие, тем сильнее и на больших расстояниях проявлены нелинейные эффекты. При определенных условиях несимметричный сигнал может вообще не выходить в пределе на линейную стадию.

Работа поддержана грантами Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ НШ-2631.2012.2 и РФФИ (грант 12-02-01149-а).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Enflo B.O., Rudenko O.V.* To the theory of generalized Burgers' equation// Acta acustica, 2002. V.88. P.155-162.
2. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
3. *Фей*
4. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И.* Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. М.: Физматлит, 2008.
5. *Sachdev P.L., Enflo B.O., Srinivasa Rao Ch., Mayil Vaganan B., Goyal Poonam.* Large-Time Asymptotics for Periodic Solutions of Some Generalized Burgers Equations // Studies In Applied Mathematics, 2003. V. 110. P.181–204.
6. *Gurbatov S.N., Demin I.Yu, Cherepennikov V.V., Enflo B.O.* Behavior of Intense Acoustic Noise at Large Distances // Acoustical Physics, 2007. Vol. 53, No. 1. Pp. 48–63.
7. *Parker A.* On the periodic solution of the Burgers equation: A unified approach //Proc.R.Soc.Lond. A, 1992. V.438. P.113-132.
8. *Гусев В.А., Собисевич А.Л.* Низкочастотные волновые процессы в геосферах, предшествующие сильным сейсмическим событиям// Коллективная монография Экстремальные природные явления и катастрофы. Т.1. Оценка и пути снижения негативных последствий экстремальных природных явлений. М.: ИФЗ РАН, 2010.

9. *Гусев В.А., Жостков Р.А.* Профили интенсивных импульсных сигналов, распространяющихся вертикально вверх в стратифицированной атмосфере // Сборник трудов XXII сессии Российского акустического общества и Сессии Научного Совета РАН по акустике. Т.1. С.200-204. М.: Геос, 2010
10. *Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В.* Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: МГУ, 1983.
11. *Gusev V.A., Sobissevitch A.L.* On a problem of propagation of shock waves generated by explosive volcanic eruptions // Nonlinear Acoustics – Fundamentals and Applications. International Symposium on Nonlinear Acoustics ISNA-18, 2008, Stockholm, Sweden, pp 397-400.
12. *Гусев В.А., Преснов Д.А.* Трансформация интенсивных пространственно-модулированных акустических сигналов в вязких неоднородных средах // Сборник трудов Научной конференции «Сессия Научного совета РАН по акустике и XXIV сессия Российского акустического общества. Т 1. М.: ГЕОС, 2011. С. 161-165.

УДК 534.222

В.А.Гусев, Д.А.Преснов

ЭФФЕКТ САМОРЕФРАКЦИИ. ПРОЯВЛЕНИЕ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Физический факультет, кафедра акустики.
Россия, 119992, Москва, Ленинские горы
Тел.: (495) 939-2943; E-mail: vgusev@bk.ru, presnov@physics.msu.ru

Рассматривается эволюция мощных акустических волн с учетом эффектов саморефракции. Приближение нелинейной геометрической акустики позволяет учесть одновременное влияние эффектов, связанных с нелинейностью и неоднородностью среды. Без учета влияния саморефракции лучи, вдоль которых происходит распространение волны, определяются кривизной волнового фронта. Саморефракция приводит к дополнительному отклонению лучей и искажению структуры поля в фокальной области. Метод растянутых характеристик позволяет получить удобное для анализа уравнение, описывающее поле на оси пучка. Благодаря этому для гауссовского сфокусированного пучка было получено несколько приближенных аналитических решений, хорошо совпадающих с результатами численного моделирования в своих областях применимости (для различных типов источников). Метод позволил также численно проанализировать влияние неоднородности в виде стратификации равновесной плотности на эффекты, возникающие при саморефракции.

Зависимость скорости фронта ударной волны от ее амплитуды приводит к нелинейной рефракции импульса, которая заключается в том, что области пучка с большей амплитудой бегут быстрее, в результате приосевые области пучка выбегают вперед и нарушается условие согласования лучей друг с другом. Соответственно, приосевые лучи перестают пересекаться и каустическая особенность исчезает. Результаты работы могут найти свое применение в медицинской ультразвуковой терапии, а также в задачах геофизики и атмосферной акустики.

Последние результаты, полученные в работе [1], численно моделируют уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова, учитывающее влияние как нелинейности (в т.ч. и саморефракции), так и дифракции и поглощения. В данной работе рассматривается распространение звуковых пучков на основе геометрической акустики, то есть учитывается нелинейность, но пренебрегается дифракцией и поглощением. Как показано далее и, в частности, в [2], в фокальной области саморефракция для разрывных волн играет преобладающую роль в ограничении амплитуды, так что пренебрежение дифракцией достаточно правомерно. Возможность пренебрежения поглощением связано с тем, что скорость ударного фронта зависит только от пиковых значений, но не от ширины ударного фронта [3], и замена реального фронта конечной ширины на математический разрыв также правомерна. Поэтому удалось получить аналитические выражения, позволяющие более детально интерпретировать физические законы.

В качестве исходной, запишем систему уравнений нелинейной геометрической акустики для осесимметричных пучков [4], в которой учтена саморефракция волны [2] и сделан переход к функции наклона лучей – производной эйконала по поперечной координате [5]:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial r}=-\frac{\mu}{2}\frac{\partial A}{\partial r}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma\left(p-\frac{A}{2}\right)\frac{\partial p}{\partial T}+\alpha\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{p}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}+\frac{\alpha}{r}\right)=0\,. \qquad (2)$$

Здесь p – акустическое давление, A – его амплитуда. Все переменные нормированы на свои характерные значения. Параметр γ равен отношению фокусного расстояния к нелинейной длине. Параметр μ – отношению квадрата фокусного расстояния к нелинейной и дифракционным [4].